MAI 1 - domácí úkol ze cvičení 10 (výběr příkladů k promyšlení).

Jako přípravu na cvičení 11 (20.12.18) zkuste promyslet kromě úloh z přednášky o limitě funkce i následující příklady (a některé zkuste i vypočítat).

1. Z definice limity ukažte:

   a) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-2)=4$; b) $\lim\limits_{x\to 0+}\sqrt{x}=0$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$; d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$.

2. Vypočítejte limity , nebo ukažte, že neexistují :

   a) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{-1}{(x+3)^2}$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-1}{(x+3)^2}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+1}{x^2-1}$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^2+1}{x^2-1}$; $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{1-x^2}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+4x-5}{(x-1)^2}$;

   b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x}{3-x^2}$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^3}{3-x^2}$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$; $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$;

   c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-x}{x}$;

   d) (limita složené funkce) $\lim\limits_{x\to 3}\exp\left(\dfrac{1}{3-x}\right)$; $\lim\limits_{x\to -\infty}\exp\left(\dfrac{1}{3-x}\right)$; $\lim\limits_{x\to +\infty}x^2\exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to \infty}\exp\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$;

   ; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$; $\lim\limits_{x\to \infty}\sin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

3. Vypočítejte následující jednoduché limity funkce (užití aritmetiky limit, věty o limitě složené funkce, věty o „dvou strážnících", základních limit a limit $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$), nebo ukažte, že funkce limitu a daném bodě nemají :

   a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\sin\sqrt{x}}{x}$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sin x}{x}$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to 0}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+\cos x)$

   b) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^{x+h}-e^x}{h}$; $\lim\limits_{x\to \infty}x\,(e^{\frac{1}{x}}-1)$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin 2x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$;

   $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\ln(1-x^2)}$; $\lim\limits_{n\to \infty}n\,\ln(1-\dfrac{2}{n}),n\in N$.

4. Vyšetřete, zda lze v bodě $a=0$ spojitě dodefinovat (a lze-li, tak dodefinujte) funkci f, která je pro $x\neq 0$ dána předpisem $f(x)=\exp(-\dfrac{1}{x^2})$.

A třeba budete mít chuť se podívat i na tento příklad:

5. Z definice exponenciální funkce a funkce sinus jako součtu nekonečných řad

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\ x\in R \quad \text{a} \quad \sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ x\in R$$

   ukažte, že

   a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ (že $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ bylo dokázáno na přednášce)

   b) $\lim\limits_{x\to +\infty}e^x=\infty$ a $\lim\limits_{x\to -\infty}e^x=0$;

   c) funkce $f(x)=e^x$ je spojitá v R .